一阶线性微分方程的解（常数变易法）

xiexuan

2025 年 3 月 7 日

一阶线性微分方程的解

题设：

给定一阶线性微分方程

$$y' + p(x)\,y = q(x),$$

其中 $p(x)$ 与 $q(x)$ 是已知连续函数，$y = y(x)$ 是未知函数。我们希望找出方程的通解。

步骤 1：先求齐次方程的解

令非齐次项零，得到齐次微分方程

$$y' + p(x)\,y = 0.$$

可视为可分离方程。假定 $y \neq 0$，则

$$\frac{dy}{dx} = -p(x)\,y \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{y}\,dy = -p(x)\,dx.$$

两边积分：

$$\int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = -\int p(x)\,\mathrm{d}x \quad \Longrightarrow \quad \ln|y| = -\int p(x)\,\mathrm{d}x + C_0.$$

其中 C_0 为积分常数。由此可得

$$y = C\,e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x},$$

其中 $C = e^{C_0}$ 仍是常数。由此，齐次方程的通解 (一般解) 为

$$y_h(x) = C\,e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}.$$

步骤 2：使用常数变易法构造特解

原非齐次方程

$$y' + p(x)\,y = q(x),$$

在其齐次解的基础上，将原先的“常数” C 视为一可变的函数 $V(x)$，即令

$$y(x) = V(x)\,e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}.$$

(1) 计算 y'

使用乘积法则及链式法则：

$$\begin{aligned} y(x) &= V(x)\,e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}, \\ y'(x) &= V'(x)\,e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x} + V(x)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}\Big). \end{aligned}$$

注意到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}\Big) = e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(-\int p(x)\,\mathrm{d}x\Big) = -p(x)\,e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}.$$

故

$$y'(x) = V'(x)\,e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x} - p(x)\,V(x)\,e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}.$$

(2) 将

y 和 y' 代入方程
把上式代入

$$y' + p(x)\,y = q(x),$$

得

$$\Big[V'(x)\,e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x} - p(x)\,V(x)\,e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}\Big] + p(x)\,\Big[V(x)\,e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}\Big] = q(x).$$

观察到方程左侧的 $-p(x)\,V(x)\,e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}$ 与 $p(x)\,V(x)\,e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}$ 两项相互抵消，故简化得

$$V'(x)\,e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x} = q(x).$$

(3) 解出

V(x)

上式可改写为

$$V'(x) = q(x)\, e^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}.$$

于是两边积分后得到

$$V(x) = \int \Big[q(t)\, e^{\int p(t)\,\mathrm{d}t}\Big]\,\mathrm{d}t + C_1,$$

其中 C_1 为积分常数 (在此积分时自变量改为 t 以与 x 区分)。由此

$$V(x) = C_1 + \int q(t)\, e^{\int p(t)\,\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t.$$

(4) 将

V(x) 带回去得到 y(x)

记得我们有

$$y(x) = V(x)\, e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}.$$

因此

$$y(x) = e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}\Big[C_1 + \int q(t)\, e^{\int p(t)\,\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t\Big].$$

若把 $C_1\, e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}$ 记作 $C\, e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}$，可理解为齐次解部分，而上述积分项则构成方程的特解 (particular solution)。因而非齐次方程的通解可写成

$$y(x) = e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x} \int \Big[q(t)\, e^{\int p(t)\,\mathrm{d}t}\Big]\,\mathrm{d}t + C\, e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}.$$

总结

1. 使用“常数变易法 (变系数法)”，先求出齐次方程解 $y_h(x) = C\, e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}$，再让齐次解中的常数 C 变成函数 $V(x)$，从而找到非齐次方程的特解。2. 这种方法无需直接背诵“积分因子公式”，却能推导得到与积分因子法形式一致的结果。3. 非齐次方程的一般解由“齐次通解 + 特解”给出，完整表达式正是

$$y(x) = e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x} \int \Big[q(t)\, e^{\int p(t)\,\mathrm{d}t}\Big]\,\mathrm{d}t + C\, e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}.$$